Terminale S et concours

L'ESSENTIEL DU COURS

MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE - MATRICES

Jean-Marc FITOUSSI

Collection Eclair
Progress Editions

L'ESSENTIEL DU COURS

MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE - MATRICES

Table des matières

ARITHMÉTIQUE

MATRICES

PROPRIÉTÉS

Propriété 1

Si b divise a et c divise b alors c divise a.

Démonstration

b *divise* a *donc il existe un entier* k *tel que* $a = b \times k$

c *divise* b *donc il existe un entier* k' *tel que* $b = c \times k'$

Ainsi $a = b \times k = (c \times k') \times k = c \times \underbrace{kk'}_{k'' \text{ appartient à } \mathbb{Z}}$ *donc* $a = k''c$ *et* **c divise a**

Propriété 2

Si c divise a et c divise b alors c divise $u \times a + v \times b$ avec u et v entiers relatifs.

Démonstration

c *divise* a *donc il existe un entier* k *tel que* $a = c \times k$

c *divise* b *donc il existe un entier* k' *tel que* $b = c \times k'$

donc $ua + vb = u \times (c \times k) + v \times (c \times k')$ *soit* $ua + vb = c \times \underbrace{(uk + vk')}_{k'' \text{ appartient à } \mathbb{Z}}$

Ainsi $ua + vb = c \times k''$ *et* **c divise** $\boldsymbol{u \times a + b \times v}$.

Conséquences

- Si b divise a donc -b divise a
- Si b divise a alors $|b| \leq |a|$
- Si b divise a et a divise b alors b=a ou b=-a
- Si b divise a alors bc divise ac

LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Le principe

Soit une propriété P_n dépendant d'un entier naturel n.

Pour démontrer que P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_o$, il suffit de montrer que :

(1) la propriété est vraie au premier rang n_o.

(2) démontrer que pour un entier $n(n \geq n_o)$, P_n vraie implique P_{n+1} vraie.

DÉMONSTRATION EN 3 ÉTAPES

Initialisation : on vérifie la propriété P_n au rang initial n_o soit P_{n_o} vraie.

Hérédité : on suppose que la propriété P_n est vraie à un rang n quelconque avec $n \geq n_o$ et on démontre sous cette hypothèse que la propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : l'axiome ci-dessus permet de conclure que la propriété est alors vraie pour tout entier $n \geq n_o$.

LIEN ENTRE CONGRUENCE ET DIVISION EUCLIDIENNE

Tout nombre est congru modulo n au reste de sa division euclidienne par n.

CONSÉQUENCES

- Modulo n, tout nombre est congru à un nombre r tel que $0 \leq r \leq n-1$.
- Si $a \equiv r[n]$ et $0 \leq r < n$ alors r est le reste de la division euclidienne de a par n.

LA SOMME ET LA DIFFÉRENCE

La relation de congruence modulo n est **compatible** avec l'addition et avec la soustraction dans $\mathbb{N}$;

Si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a : $a + a' \equiv b + b'[n]$ et $a - a' \equiv b - b'[n]$.

DÉMONSTRATIONS

La somme

si $a \equiv b[n]$ *alors* $a - b \equiv 0[n]$ *d'où* $a - b$ *multiple de* n

si $a' \equiv b'[n]$ *alors* $a' - b' \equiv 0[n]$ *d'où* $a' - b'$ *multiple de* n

donc $a - b + a' - b'$ *multiple de* n.

$a - b + a' - b' \equiv 0[n] \Leftrightarrow a + a' \equiv b + b'[n]$.

La différence

si $a \equiv b[n]$ *alors* $a - b \equiv 0[n]$ *d'où* $a - b$ *multiple de* n

si $a' \equiv b'[n]$ *alors* $a' - b' \equiv 0[n]$ *d'où* $a' - b'$ *multiple de* n

soit $a - b - (a' - b')$ *multiple de* n *d'où* $a - b - (a' - b') \equiv 0[n]$

$\Leftrightarrow a - a' \equiv b - b'[n]$.

LA MULTIPLICATION

La relation de congruence modulo n est compatible avec le produit dans $\mathbb{N}$;

Si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a : $a \times a' \equiv b \times b'[n]$.

Démonstration

si $a \equiv b[n]$ *alors* $a - b \equiv 0[n]$ *d'où* $a = kn + b$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

si $a' \equiv b'[n]$ *alors* $a' - b' \equiv 0[n]$ *d'où* $a' = k'n + b'$ *avec* $k' \in \mathbb{Z}$

soit $a \times a' = (kn + b)(k'n + b')$

$a \times a' = bb' + n(kb + bk' + kk'n)$

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ 1

Soit a et b deux entiers relatifs. On suppose que a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Un entier qui divise a et b est appelé diviseur commun à a et b.

L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément appelé plus grand commun diviseur de a et b et il est noté PGCD (a ; b).

NOTATION

On note D(n) l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ d'un entier relatif n.

L'ensemble D(a) $\cap$ D(b) est l'ensemble des diviseurs communs de a et de b.

PROPRIÉTÉ 2

Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

- Si, dans leur décomposition en produit de facteurs premiers, a et b n'ont pas de facteur premier commun alors le PGCD (a ; b) = 1.
- Sinon, le PGCD de a et de b est égal au produit des facteurs premiers communs de a et de b, chacun d'eux étant affecté du plus petit exposant figurant dans la décomposition de a et de b.

RÈGLES SUR LE PGCD

Pour tous a, b de $\mathbb{Z}$ non tous deux nuls :

- PGCD (a ; b) est un entier strictement positif ;
- PGCD (a ; a) = |a| ; PGCD (a ; 1) = 1 ; PGCD (a ; 0) = |a| ;
- PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a) = PGCD (|a| ; |b|)
- D(a) $\cap$ D(b) = D (PGCD (a ; b)) (conséquence de la proposition 2), ce qui signifie que les diviseurs commun à a et b sont les diviseurs de leur PGCD.

CONSÉQUENCE

Pour tous entiers relatifs a et b non tous deux nuls et tout k de $\mathbb{N}^*$,
PGCD (ka ; kb) = k PGCD (a ; b)

Démonstration

Soit d = PGCD (a ; b).
On pose a' et b' deux multiples de a et b tel que a' = ka et b' = kb avec k un entier relatif.
Il existe donc d' = PGCD (a' ; b').

Comme d divise a et b alors kd est aussi diviseur de ka et kb et donc kd divise a' et b'.

Or $d' = PGCD(a';b')$ *donc kd divise d' soit* $d' = k'(kd)$ *avec k' un entier relatif.*

On peut déduire que $k'(kd) = PGCD(a';b') \Leftrightarrow k'(\cancel{k}d) = PGCD(\cancel{k}a;\cancel{k}b) \Leftrightarrow k'd = PGCD(a;b)$

avec $d = PGCD(a;b)$ *d'où* $k' = 1$ et $d' = kd$.

Comme $d' = PGCD(ka;kb)$ *et* $d' = kPGCD(a;b)$ *on a bien* $PGCD(ka;kb) = kPGCD(a;b)$,

Propriété

Si a divise b alors PGCD (a ; b) = |a|.